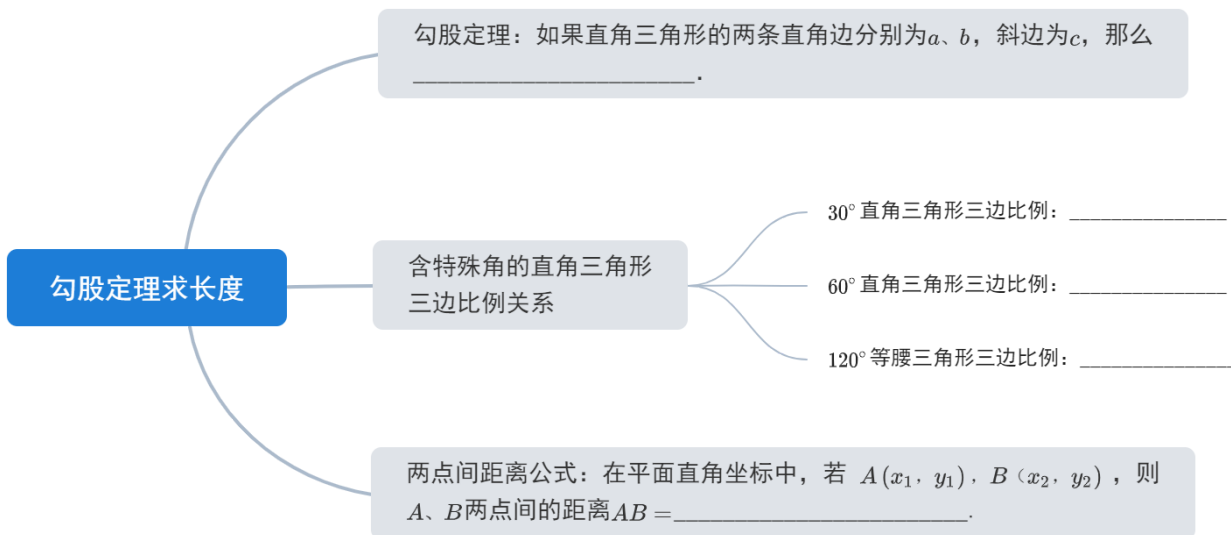


第2讲 勾股定理综合应用

一、勾股定理求长度

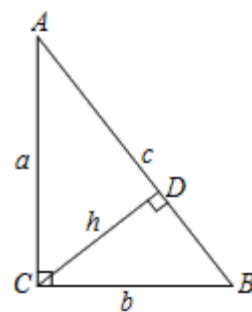
1. 直接利用勾股定理求长度



2. 求三角形一边上的高

①求直角三角形斜边上的高：

如图所示，可得 $S_{\triangle ACB} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\therefore h = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

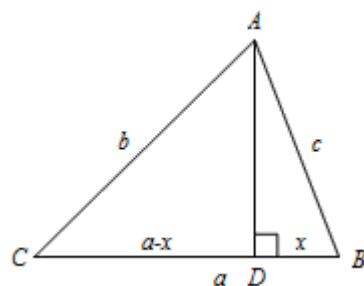


②求任意三角形一条边上的高：

已知三角形的三边长分别为 a ， b ， c ，求 BC 边上的高。

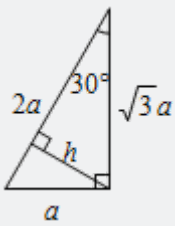
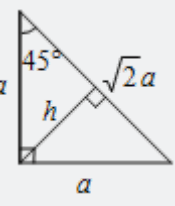
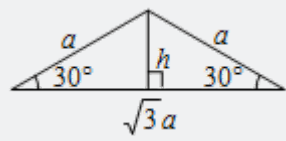
$\because \triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 都是_____三角形，
 $\therefore AD^2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

解方程即可得到 x 的值。



【教法备注】

(1) 含有特殊角的直角三角形三边比例关系：

特殊三角形	三边比	面积	最长边的高
	$1 : \sqrt{3} : 2$	$S = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$	$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
	$1 : 1 : \sqrt{2}$	$S = \frac{1}{2}a^2$	$h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
	$1 : 1 : \sqrt{3}$	$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$h = \frac{1}{2}a$

注意：

30° 所对的直角边是斜边的一半，是在初二上学期等边三角形这部分涉及到的知识点，学生有遗忘可以进行复习，

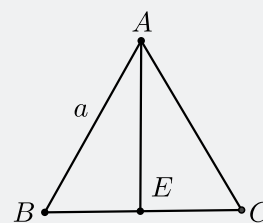
证明：

如图，边长为 a 的等边三角形 ABC 中， $AE \perp BC$ ，

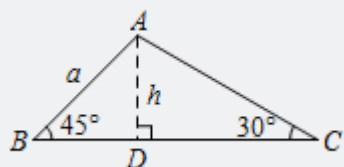
$\therefore E$ 为 BC 的中点，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB.$$



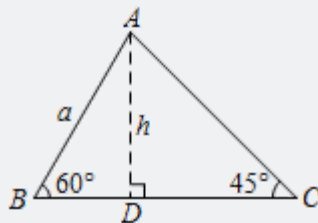
(2) 含特殊角的三角形：



已知 $AB = a$,

则 $BD = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $CD = \frac{\sqrt{6}}{2}a$,

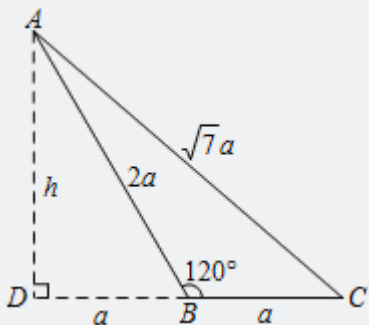
$AC = \sqrt{2}a$, $BC = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}a$.



已知 $AB = a$, 则 $BD = \frac{1}{2}a$,

$AD = CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

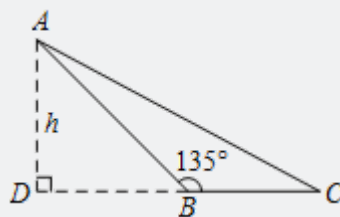
$AC = \frac{\sqrt{6}}{2}a$, $BC = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}a$.



已知 $AB = 2a$, $BC = a$, $\angle ABC = 120^\circ$,

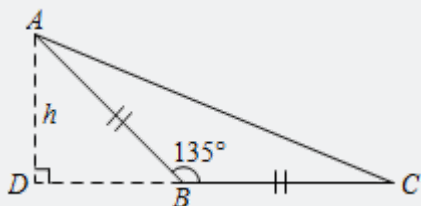
构造 $\text{Rt}\triangle ADB$, 解 $\text{Rt}\triangle ADC$,

$AC = \sqrt{7}a$.



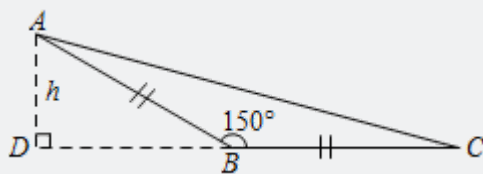
已知 AB 、 BC 的长, $\angle ABC = 135^\circ$,

构造 $\text{Rt}\triangle ADB$, 解 $\text{Rt}\triangle ADC$.



已知 $AB = BC = a$, $\angle ABC = 135^\circ$,

构造 $\text{Rt}\triangle ADB$, 解 $\text{Rt}\triangle ADC$.



已知 $AB = BC = a$, $\angle ABC = 150^\circ$,

构造 $\text{Rt}\triangle ADB$, 解 $\text{Rt}\triangle ADC$.

注意：

① 利用勾股定理求线段长的前提条件是在直角三角形中，如果没有直角三角形为条件往往要添加辅助线构造直角三角形。

② 作垂线构造直角三角形是解决这类题的关键。

(3) 求三角形一边上的高：

① 求直角三角形斜边上的高

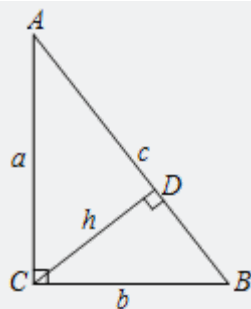
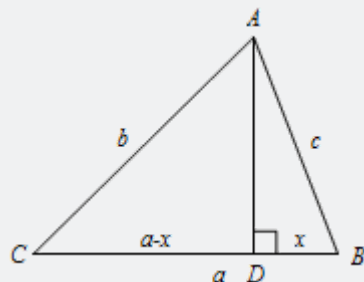
如图所示，根据三角形的面积可得 $ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$ 。

等面积法求直角三角形斜边上的高

②求任意三角形一条边上的高

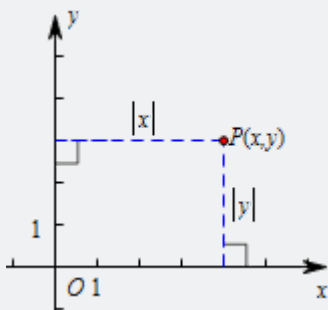
已知三角形的三边长分别为 a, b, c ，求 BC 边上的高。

$\because \triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 都是直角三角形，因此可得到等式 $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$ ，再根据勾股定理求出高即可。

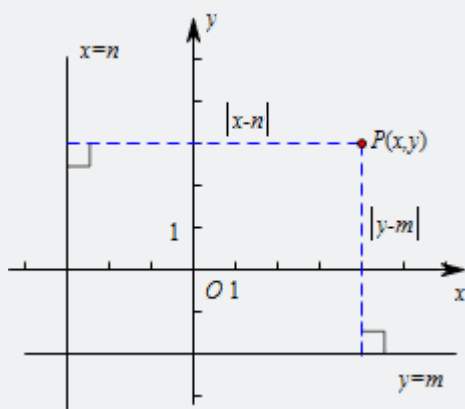


(3) 点到直线的距离：

①点 $P(x, y)$ 到 x 轴的距离是 $|y|$ ，点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离是 $|x|$ 。



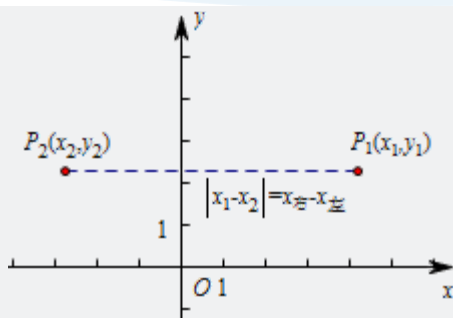
②点 $P(x, y)$ 到直线 $x = n$ 的距离是 $|x - n|$ ，点 $P(x, y)$ 到直线 $y = m$ 的距离是 $|y - m|$ 。



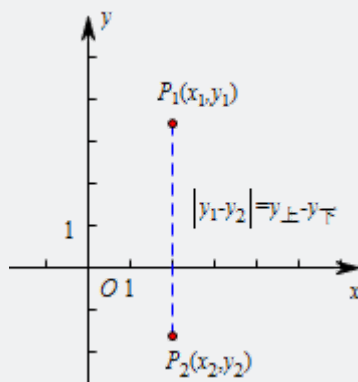
(4) 两点间距离：

①当 P_1P_2 平行于 x 轴时，两点的纵坐标相等 ($y_1 = y_2$)，所以两点间距离为

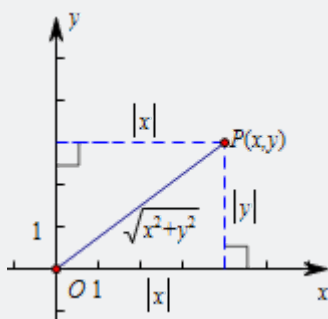
$P_1P_2 = |x_1 - x_2| = x_{\text{右}} - x_{\text{左}}$ (右边点的横坐标一定大于左边点的横坐标)。



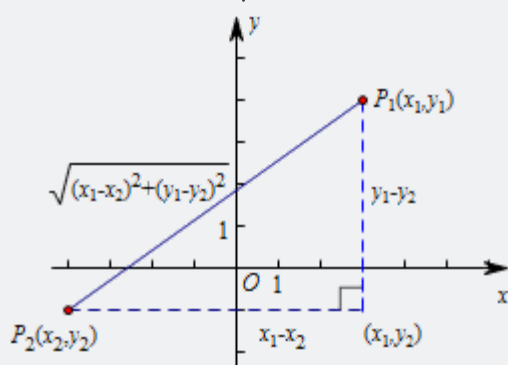
②当 P_1P_2 平行于 y 轴时，两点的横坐标相等（ $x_1 = x_2$ ），所以两点间距离为
 $P_1P_2 = |y_1 - y_2| = y_{\text{上}} - y_{\text{下}}$ （上边点的纵坐标一定大于下边点的纵坐标）。



③点 $P(x, y)$ 到原点的距离是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ ；



④点 $P_1(x_1, y_1)$ 到点 $P_2(x_2, y_2)$ 的距离 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，

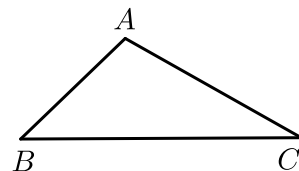


|| 例题

【知识点拨】

特殊直角三角形三边比例关系这部分，引导学生进行推导，填空选择题直接利用结论推导比例关系即可；解答题不能直接利用，必须利用勾股定理求解。求三角形一边上的高这部分，两种解题思路，其中第二种适用于所有的三角形，但是对于直角三角形利用等面积法求解最快。

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = \sqrt{3} + 1$ ，则边 AC 的长为（ ）。



A. $\sqrt{2}$

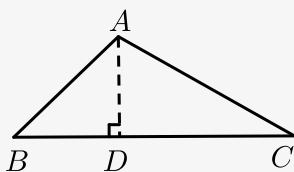
B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{6}$

【答案】 C

【解析】 如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，



$$\because \angle B = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AD^2 + BD^2 = 2AD^2 = AB^2 = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

$$\text{解得：} AD = BD = 1,$$

$$\because BC = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{3} + 1 - 1 = \sqrt{3},$$

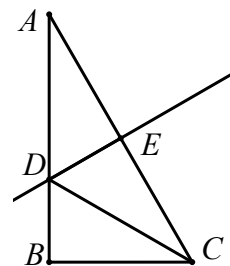
$$\text{在Rt}\triangle ACD\text{中，} AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

故选：C.

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

练习

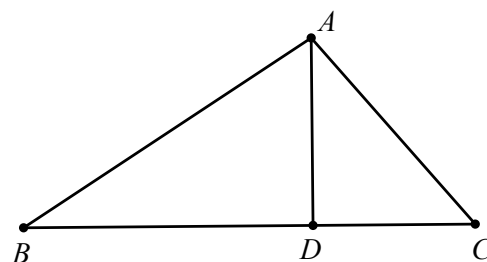
2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， DE 垂直平分斜边 AC ，交于 D ， E 为垂足，连接 CD ，若 $BD = 1$ ，则 AC 的长为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{3}$

【标注】 【知识点】 30° 特殊角的性质应用

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AD = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。



【答案】 $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

【解析】 $\because AD \perp BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ ,$$

$$\because \angle B = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ ,$$

$$\therefore BD = AD = 1 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = 90^\circ$,

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2} ,$$

$$\because \angle C = 30^\circ ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$$\therefore AC = 2AD = 2 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle DC = 90^\circ$,
 $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{3}$,
 $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} + 1$,
 即 $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

|| 例题

4. 若直角三角形的两条直角边长分别为 3cm , 4cm , 则斜边上的高为 () .
 A. $\frac{5}{2}\text{cm}$ B. $\frac{5}{12}\text{cm}$ C. 5cm D. $\frac{12}{5}\text{cm}$

【答案】D

【解析】直角三角形两直角边长为 3cm 、 4cm ,

$$\therefore \text{斜边} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{cm},$$

设斜边上高为 h ,

根据三角形面积相等,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \cdot h$$

$$\therefore h = \frac{12}{5}\text{cm}.$$

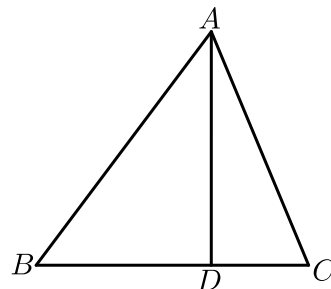
故选D.

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【重点强调】

2017~2018学年3月天津塘沽区天津市塘沽区第二中学初二下学期月考第9题3分

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 15$, $BC = 14$, $CA = 13$, 求 BC 边上的高 AD .



【答案】12.

【解析】设 BD 为 x ，则 $CD = 14 - x$ ，

$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB^2 - BD^2 = AD^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC^2 - CD^2 = AD^2$ ，

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ 。

即 $15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$ ，

解得： $x = 9$ 。

$\therefore CD = 14 - x = 14 - 9 = 5$ 。

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$

$= \sqrt{15^2 - 9^2}$

$= 12$ 。

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【重点强调】

解题思路：利用方程思想求长度（求任意三角形的高）

练习

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别是 a 、 b 、 c ，若 $a^2 + b^2 = 25$ ， $a^2 - b^2 = 7$ ，已知 $c = 5$ ，则最大边上的高为 _____。

【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】由 $a^2 + b^2 = 25$ ， $a^2 - b^2 = 7$ 可列方程组如下

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a^2 - b^2 = 7 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $a^2 + b^2 = c^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，

设 $\triangle ABC$ 斜边上的高为 h ，

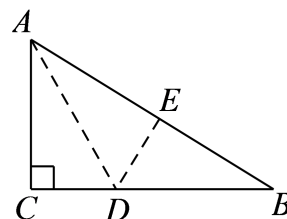
$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times h,$$

$$\text{解得 } h = \frac{12}{5}.$$

故答案为： $\frac{12}{5}$ 。

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

7. 有一块直角三角形纸片，且直角边 $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，现将直角边 AC 沿直线 AD 折叠，使它恰好落在斜边 AB 上，且与 AE 重合，求： AB 和 CD 的长。



【答案】 $AB = 10$ ， $CD = 3$ 。

【解析】 设 $CD = x$ ，则 $BD = 8 - x$ ，

$$\because CD = DE = x,$$

$$\because AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10, BE = AC = 6,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 4,$$

$$\because \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore ED^2 + EB^2 = DB^2,$$

$$\therefore x^2 + 4^2 = (8 - x)^2, \text{ 解得 } x = 3.$$

$$\therefore AB = 10, CD = 3.$$

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

|| 例题

8. 在直角坐标系中，已知两点的坐标是 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， M ， N 两点之间的距离可以用公式

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ 计算.}$$

解答下列问题：

- (1) 若已知点 $A(1, 2)$ ， $B(4, -2)$ ，求 A ， B 两点间的距离。
- (2) 在(1)的条件下，点 O 是坐标原点，判断 $\triangle AOB$ 是什么三角形，并说明理由。

【答案】 (1) 5。

(2) $\triangle AOB$ 是直角三角形。理由见解析。

【解析】 (1) $AB = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 + 2)^2} = 5$ 。

(2) $\triangle AOB$ 是直角三角形。

$$\text{理由如下：} AO^2 = (1 - 0)^2 + (2 - 0)^2 = 5,$$

$$BO^2 = (4-0)^2 + (-2-0)^2 = 20 ,$$

$$AB^2 = 25 ,$$

$$\therefore AO^2 + BO^2 = AB^2 ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形 .

【标注】【知识点】坐标与距离

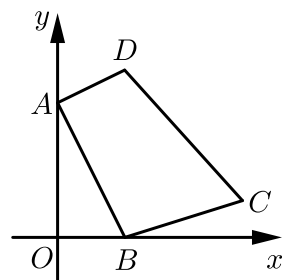
【知识点】勾股定理的逆定理

【知识点】勾股逆定理的应用

【能力】运算能力

练习

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(0,4)$, $B(2,0)$, $C(5,1)$, $D(2,5)$.



(1) $AD = \underline{\hspace{2cm}}$, $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $\angle BAD$ 是直角吗? 请说出理由 .

(3) 求点 B 到直线 CD 的距离 .

【答案】(1) $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$

(2) 是, 证明见解析 .

(3) 3 .

【解析】(1) $\because A(0,4)$, $B(2,0)$, $C(5,1)$, $D(2,5)$.

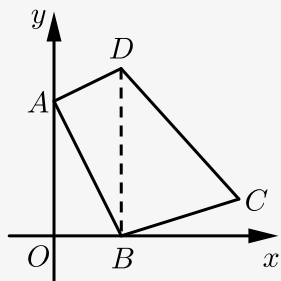
$$\therefore AD = \sqrt{(0-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5} ;$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} .$$

故答案为: $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$.

(2) $\angle BAD$ 是直角 ,

理由: 连接 BD ,



$$\therefore B(2,0), D(2,5),$$

$$\therefore BD = 5 - 0 = 5.$$

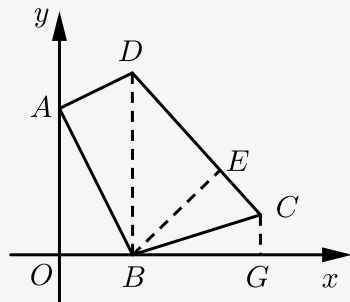
$$\therefore \text{由 (1) 知 } AD = \sqrt{5}, AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AD^2 = 5, AB^2 = 20, BD^2 = 25,$$

$$\therefore AD^2 + AB^2 = BD^2,$$

$$\therefore \angle BAD \text{ 是直角}.$$

(3) 过点B作 $BE \perp CD$ 于点E, 作 $CE \perp x$ 轴于点G,



$$\therefore C(5,1), D(2,5),$$

$$\therefore CD = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

$$\therefore B(2,0), D(2,5).$$

$$\therefore BD \perp x \text{ 轴}, BG = 5 - 2 = 3, CG = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\text{梯形} DBGC} - S_{\triangle BCG}, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 5BE = \frac{1}{2}(1+5) \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3$$

$$\text{, 解得 } BE = 3.$$

答: 点B到直线CD的距离为3.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】坐标与距离

【知识点】勾股逆定理的应用

【知识点】勾股定理的逆定理

二、勾股定理中的分类讨论思想

勾股中的分类讨论思想

有的题目出现高的时候，高可能出现在三角形____部，也可能出现在三角形的____部，讨论三角形的形状：

- (1) 锐角三角形高在____部
- (2) 钝角三角形高在____部

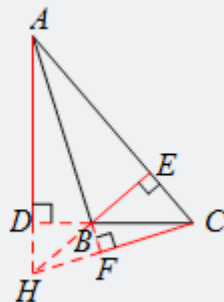
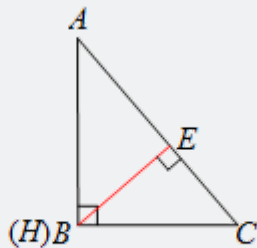
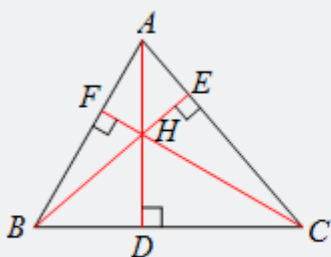
对于指明了三角形是直角三角形，但没有指明哪条边是斜边，也需要对____的情况进行讨论：

- (1) 斜边为已知边
- (2) 斜边为未知边

【教法备注】

1、有的题目没有明确指出是怎么样的三角形，那么就需要对三角形的形状进行讨论：锐角三角形、直角三角形、钝角三角形。

尤其是出现高的时候，高可能在三角形内部，也可能在三角形外；



2、有时指明了三角形是直角三角形，但没有指明哪条边是斜边，也需要对斜边的情况进行讨论：斜边为已知边；斜边为未知边。

|| 例题

10. 已知一个直角三角形的两边长分别为3和4，则第三边长的平方是（ ）。

- A. 25 B. 14 C. 7 D. 7或25

【答案】 D

【解析】 分两种情况：（1）3、4都为直角边，由勾股定理得，斜边为5；

（2）3为直角边，4为斜边，由勾股定理得，直角边为 $\sqrt{7}$ ， $\therefore$ 第三边长的平方是25或7。

【标注】 【知识点】 已知两边求第三边-分类讨论

【重点强调】

解题思路：分类讨论第三边（为斜边或为直角边）

练习

11. 若一直角三角形两边长分别为12和5，则第三边长为（ ）.

- A. 13 B. 13或 $\sqrt{119}$ C. 13或15 D. 15

【答案】B

【解析】若第三边为斜边，则由勾股定理可得第三边为13，
若12为斜边，则由勾股定理可得第三边为 $\sqrt{119}$.
因此答案选B.

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

例题

12. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB = 15$ ， $AC = 13$ ，高 $AD = 12$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长是（ ）.

- A. 42 B. 32 C. 42或32 D. 37或33

【答案】C

【解析】（1）当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

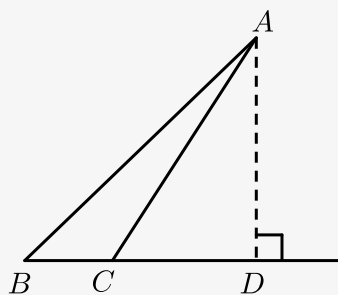
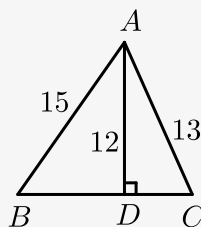
$$\therefore BC = 5 + 9 = 14.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{的周长为 } 15 + 13 + 14 = 42.$$

（2）当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，

$$BC = BD - CD = 9 - 5 = 4,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{的周长为 } 15 + 13 + 4 = 32.$$



【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

【重点强调】

解题思路：分类讨论三角形的形状（锐角三角形、钝角三角形）

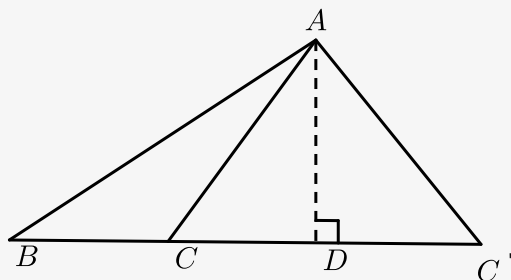
2017~2018学年天津南开区天津市育贤中学初二下学期期中第8题3分

13. $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle B = 30^\circ$, 则 $BC =$ _____ .

【答案】 $4\sqrt{3} + 3$ 或 $4\sqrt{3} - 3$

【解析】 如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$,

当



AB, AC 在 AD 同侧时,

$\because \angle B = 30^\circ, AB = 8$,

$\therefore AD = 4, BD = 4\sqrt{3}$.

$\because AC = 5$,

$\therefore CD = 3$.

$\therefore BC = 4\sqrt{3} - 3$.

当 AB, AC' 在 AD 异侧时,

同理可得, $AD = 4, BD = 4\sqrt{3}, C'D = 3$.

$\therefore BC' = 4\sqrt{3} + 3$.

【标注】 【知识点】 直接用勾股求边长

练习

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{34}$, $AC = 5$, 若 BC 边上的高等于3, 则 BC 边的长为 _____ .

【答案】 9或1

【解析】 有两种情况:

① 如图1, $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高,

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$,

由勾股定理得: $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} = 5$,

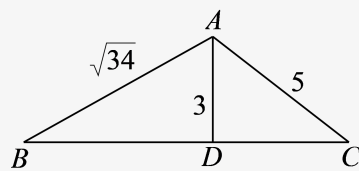


图1

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 5 + 4 = 9;$$

$$\textcircled{2} \text{如图2, 同理得: } CD = 4, BD = 5,$$

$$\therefore BC = BD - CD = 5 - 4 = 1,$$

综上所述, BC 的长为 9 或 1.

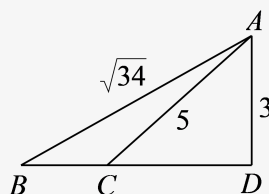


图2

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle B = 30^\circ$, 则 BC 的长度为 _____.

【答案】 $\sqrt{3} + 1$ 或 $\sqrt{3} - 1$

【解析】 略.

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

三、勾股定理与逆定理的综合运用

勾股定理、逆定理综合

勾股定理:

如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b , 斜边长为 c , 那么

_____.

即直角三角形中_____. (文字)

勾股定理逆定理:

如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足_____,

那么这个三角形是_____.

【教法备注】

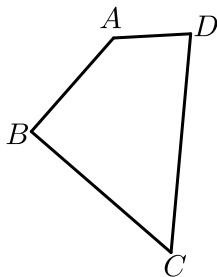
- 1、勾股定理：如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ ．即直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方．
- 2、勾股定理逆定理：如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形是直角三角形．

例题

【知识点拨】

在几何题中，通常会综合运用勾股定理与逆定理解决三角形的问题，如证明两条直线互相垂直、图形折叠、解斜三角形等等．同时，在综合题中也常常利用勾股定理求线段长

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB : BC : CD : DA = 2 : 2 : 3 : 1$ ，且 $\angle B = 90^\circ$ ．

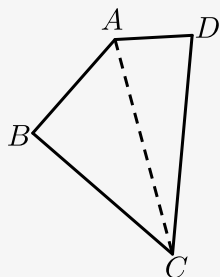


- (1) 求 $\angle DAB$ 的度数．
- (2) 若 $AB = 1$ ，求 $S_{\text{四边形}ABCD}$ 的值．

【答案】(1) $\angle DAB = 135^\circ$ ．

$$(2) S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} .$$

【解析】(1) 连接 AC ，



设 AB 、 BC 、 CD 、 DA 分别为 $2x$ 、 $2x$ 、 $3x$ 、 x ，

$$\because \angle B = 90^\circ, AB = 2x, BC = 2x,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}x, \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore AC^2 + AD^2 = (2\sqrt{2}x)^2 + x^2 = 9x^2, CD^2 = 9x^2,$$

$$\therefore AC^2 + AD^2 = CD^2,$$

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle BAC + \angle CAD = 135^\circ .$$

$$(2) \because AB = 1, AB : BC : CD : DA = 2 : 2 : 3 : 1,$$

$$\therefore BC = 1, CD = \frac{3}{2}, AD = \frac{1}{2},$$

$$\text{由(1)得 } AC = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle DAC} \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times BC + \frac{1}{2} \times AD \times AC \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

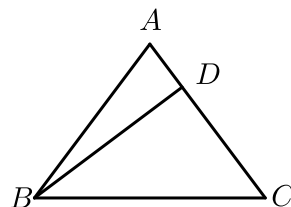
【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市第二南开中学初二下学期月考第23题8分

练习

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC$, D 是 AC 上的一点, $CD = 9$, $BC = 15$, $BD = 12$.



(1) 证明: $\triangle BCD$ 是直角三角形.

(2) 求: $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 75.

【解析】(1) $\because CD = 9, BD = 12,$

$$\therefore CD^2 + BD^2 = 81 + 144 = 225.$$

$$\because BC = 15,$$

$$\therefore BC^2 = 225.$$

$$\therefore CD^2 + BD^2 = BC^2.$$

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形, 且 $\angle BDC = 90^\circ$ (勾股定理逆定理).

(2) 设 $AD = x$, 则 $AC = x + 9$.

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AB = x + 9.$$

$$\because \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ .$$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ (勾股定理) } .$$

$$\text{即} (x+9)^2 = x^2 + 12^2$$

$$\text{解得: } x = \frac{7}{2} .$$

$$\therefore AC = \frac{7}{2} + 9 = \frac{25}{2} .$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 75 .$$

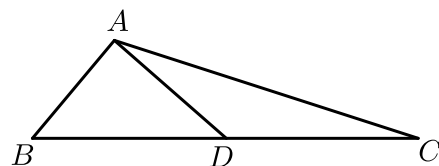
【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

解题思路：利用方程思想求解

例题

18. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 的中点，若 $AB = 5$ ， $AC = 13$ ， $AD = 6$ ，则 BC 的长为（ ）。



A. $\sqrt{61}$

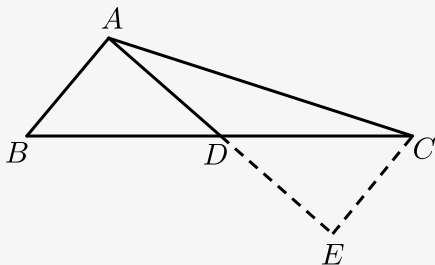
B. $2\sqrt{61}$

C. 13

D. 12

【答案】B

【解析】如图，延长 AD 至点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 CE ，可证： $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ 。



$$\therefore CE = AB .$$

在 $\triangle ACE$ 中， $AE = 12$ ， $CE = 5$ ， $AC = 13$ ，

$$\therefore AE^2 + CE^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = AC^2 .$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ .$$

$$\text{在Rt}\triangle CDE\text{中，} CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} .$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{61}.$$

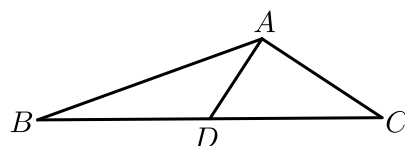
【标注】【知识点】勾股定理与全等

【重点强调】

解题思路：通过倍长中线作辅助线构造直角三角形

练习

19. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $AC = 3$ ， BC 边的中线 $AD = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积（ ）。



A. 5

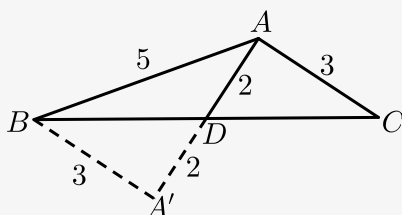
B. 6

C. 7

D. 8

【答案】B

【解析】延长 AD 至 A' ，使得 $A'D = AD$ ，连接 $A'B$ 。



易证 $\triangle ADC \cong \triangle A'DB (SAS)$ ，故 $A'B = AC = 3$ 。

又 $A'A = 2AD = 4$ ， $AB = 5$ ，

故在 $\triangle ABA'$ 中， $A'B^2 + A'A^2 = AB^2$ ，

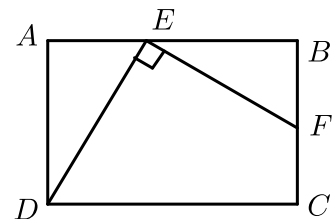
根据勾股定理的逆定理， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle A' = 90^\circ$ 。

所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABA'} = \frac{1}{2} A'B \cdot A'A = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ 。

【标注】【知识点】倍长（类）中线

例题

20. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AE = BF = 3$ ， $EF \perp ED$ 交 BC 于 F ，若矩形的周长为22，则 EF 的长为 _____。



【答案】 5

【解析】 由三垂直模型，易证 $\triangle DAE \cong \triangle EBF$ ，

$$\therefore DA = EB.$$

$\therefore$ 矩形周长为 22，

$$\therefore AD + AB = 11,$$

$$\therefore AD + AE + EB = 11,$$

$$\therefore 2AD + 3 = 11,$$

$$\therefore AD = BE = 4.$$

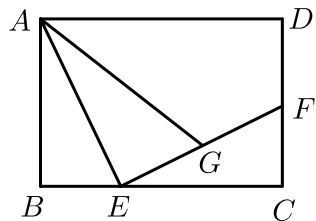
$$\text{又} \because AE = BF = 3,$$

$$\therefore EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = 5.$$

【标注】 【知识点】 矩形的周长与面积

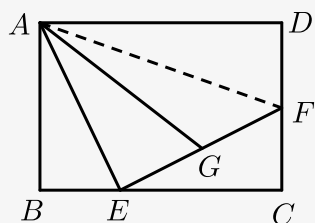
练习

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，点 E 为边 BC 上一点，且 $EC = 2BE$ ，点 F 是 CD 的中点，点 G 为 EF 的中点，则 AG 的长为 _____.



【答案】 5

【解析】 连接 AF ，



$$\begin{aligned}
 &\because AB = 4, BC = 6, EC = 2BE, \\
 &\therefore BE = \frac{1}{3}BC = 2, EC = \frac{2}{3}BC = 4, \\
 &\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \\
 &\because F \text{ 是 } CD \text{ 的中点}, \\
 &\therefore CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = 2, \\
 &\therefore EF = \sqrt{EC^2 + CF^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \\
 &\text{又} \because AD = BC = 6, DF = \frac{1}{2}CD = 2, \\
 &\therefore AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = 2\sqrt{10}, \\
 &\therefore (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{10})^2, \\
 &\text{即 } AE^2 + EF^2 = AF^2, \\
 &\therefore \angle AEG = 90^\circ, \\
 &\text{又} \because G \text{ 是 } EF \text{ 的中点}, \\
 &\therefore EG = \frac{1}{2}EF = \sqrt{5}, \\
 &\therefore AG = \sqrt{AE^2 + EG^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

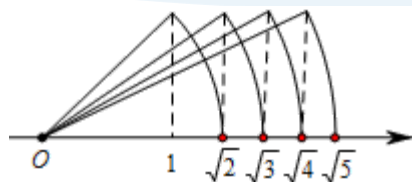
【重点强调】

解法思路：通过勾股定理得到三垂直模型，进而得到等腰直角三角形
2019年天津红桥区初三二模第17题3分

四、勾股定理表示无理数线段

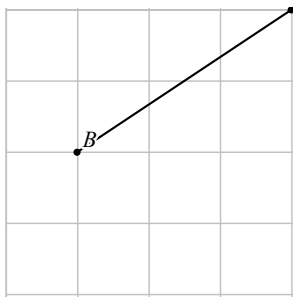
【思考】：

①如图，对于边长为1的直角三角形，其斜边长度为____，以O为圆心该长度为半径画弧，与数轴的交点表示的数为____.



如果想在数轴上表示出 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 应该如何画出呢？

②如图，在边长为1的正方形网格中， $AB=$ _____.



如果想找出 $2\sqrt{5}$ 应该如何画出呢？

勾股定理表示无理数线段

实数与数轴的关系：实数与数轴上的点是_____的.

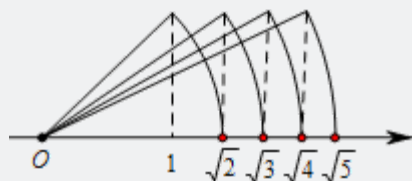
在数轴上找表示无理数的点：有理数在数轴上较易找到它的对应点，若要在数轴上直接标出无理数对应的点较难，由此，我们可构造_____，利用_____来确定.

在网格中作无理数的线段：在格点图中作长度为无理数的线段时，通常利用直角边长为_____的_____三角形构造线段.

【教法备注】

思考：

①如图，对于边长为1的直角三角形，其斜边长度为 $\sqrt{2}$ ，以O为圆心该长度为半径画弧，与数轴的交点表示的数为 $\sqrt{2}$.

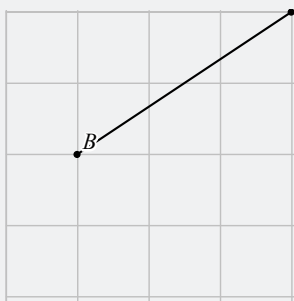


如果想在数轴上表示出 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 应该如何画出呢？

$\sqrt{3}$ ：构造直角边为 $\sqrt{2}$ 和1的直角三角形

$\sqrt{5}$ ：构造直角边为2、1的直角三角形

②如图，在边长为1的正方形网格中， $AB=\sqrt{13}$.

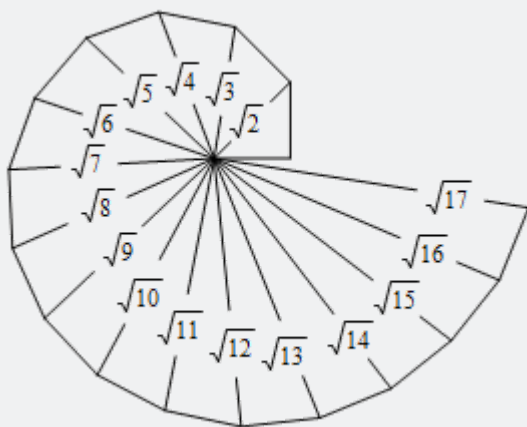


如果想找出 $2\sqrt{5}$ 应该如何画出呢？

找出长度为2、4的两边构造直角三角形，斜边即为 $2\sqrt{5}$

(1) 在数轴上找表示无理数的点

实数与数轴上的点是一一对应的，有理数在数轴上较易找到它的对应点，若要在数轴上直接标出无理数对应的点较难，由此，我们可构造直角三角形，利用勾股定理来确定。



(2) 巧用网格作无理数的线段

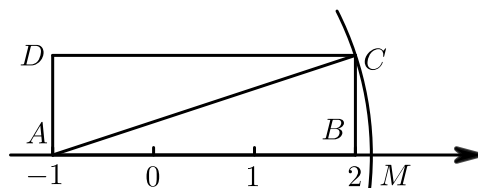
在格点图中作长度为无理数的线段时，通常利用直角边长为整数的直角三角形构造线段。

|| 例题

【知识点拨】

数轴上表示无理数这部分，主要在选择填空题中考察，利用勾股定理寻找出两条直角边即可；这部分易错点：数轴上点表示的数是指到原点的距离，所以一定要看好点是在原点的左侧还是右侧。网格题型是近几年的常考题型，也是天津中考或期末考试的一个难点，本讲内容往往出现在中考或期末考试的解答題中、占比较小。正方形网格中的每一个角都是直角，所以在正方形网格中的计算都可以归结为求任意两个格点之间的长度问题，然后应用勾股定理来进行计算。这部分解题思路主要是找到整数直角边，从一个格点出发，符合题意的线段有多种可能，画出一条即可。练习中会涉及到求解三角形面积，割补法求解即可。

如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $AD = 1$ ，点 A ， B 在数轴上，若以点 A 为圆心，对角线 AC 的长为半径作弧交数轴的正半轴于点 M ，则点 M 表示的数为（ ）。



A. $\sqrt{10} - 1$

B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{5} - 1$

D. $\sqrt{5}$

【答案】 A

【解析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore$ 以点 A 为圆心， AC 为半径画弧交数轴正半轴于点 M ，

$$\therefore AC = AM = \sqrt{10},$$

$\therefore$ 点 M 表示的数为： $\sqrt{10} - 1$ 。

故选A。

【标注】【知识点】勾股定理表示无理数

【重点强调】

2020年天津南开区初三一模第10题3分

23. 如图，正方形网格中的每个小正方形的边长都是1，每个小格的顶点叫做格点。

(1) 在图1中以格点为顶点画一个面积为10的正方形。

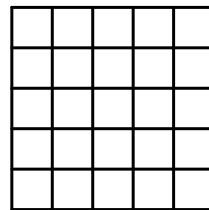


图 1

(2) 在图2中以格点为顶点画一个三角形，使三角形三边长分别为2、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{13}$ 。

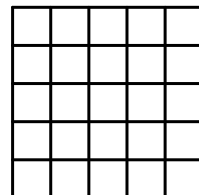


图 2

(3) 如图3，点 A 、 B 、 C 是小正方形的顶点，求 $\angle ABC$ 的度数。

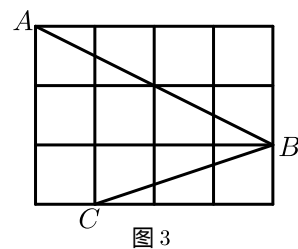


图 3

【答案】(1) 画图见解析 .

(2) 画图见解析 .

(3) 45° .

【解析】(1) 如图1的正方形的边长是 $\sqrt{10}$ ，面积是10 .

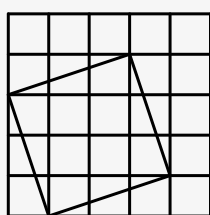


图 1

(2) 如图2的三角形的边长分别为2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$.

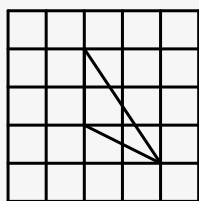


图 2

(3) 取 AB 上的格点 D ，连接 AC ， CD ，

$$\text{则 } AD = BD = CD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} ,$$

$$\text{由勾股定理： } AC = BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = 45^\circ .$$

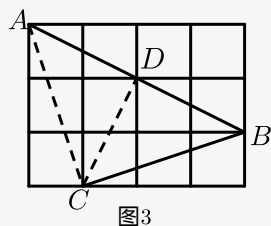


图3

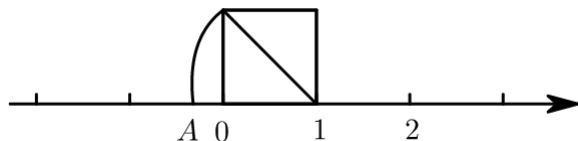
【标注】【知识点】勾股定理表示无理数

【重点强调】

2016~2017学年天津宝坻区宝坻区马家店镇初级中学初二下学期期中第23题9分

练习

24. 如图，以数轴的单位长度线段为边作一个正方形，以表示数1的点为圆心，正方形对角线长为半径画弧，交数轴于点A，则点A表示的数是（ ）。



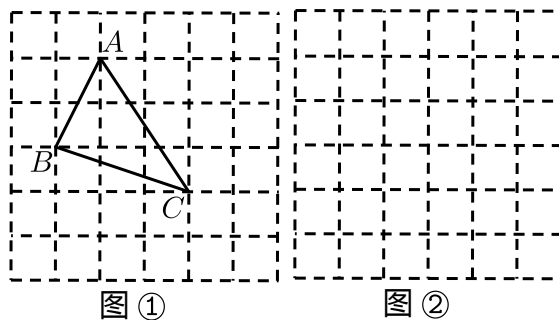
- A. $-\sqrt{2}$ B. $-1 + \sqrt{2}$ C. $-1 - \sqrt{2}$ D. $1 - \sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 圆半径为 $\sqrt{2}$ ，所以点A表示的数是 $1 - \sqrt{2}$ ；
故选D

【标注】【知识点】勾股定理表示无理数

25. $\triangle ABC$ 中， AB 、 BC 、 AC 三边的长分别为 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{13}$ ，求这个三角形的面积，小辉同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为1），再在网格中画出格点 $\triangle ABC$ （ $\triangle ABC$ 三个顶点都在小正方形的顶点处），如图所示，这样不需求 $\triangle ABC$ 的高，而借用网格就能计算出它的面积。



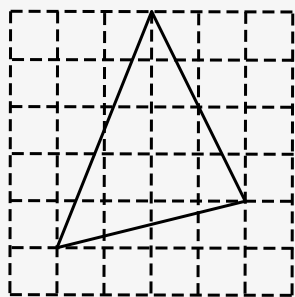
- (1) 请你将 $\triangle ABC$ 的面积直接填写横线上 _____。
- (2) 若 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 $\sqrt{25m^2 + 4n^2}$ ， $\sqrt{4n^2 + 16m^2}$ ， $\sqrt{m^2 + 16n^2}$ ($m > 0$ ， $n > 0$ 且 $m \neq n$)，运用构图法可求出这三角形的面积为 _____。

【答案】 (1) 3.5

(2) $9mn$

【解析】 (1) $S_{\triangle ABC} = 9 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3.5$ 。

(2) $S_{\triangle} = 4n \cdot 5m - \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot 5m - \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot 4m - \frac{1}{2} \cdot 4n \cdot m = 20mn - 5mn - 4mn - 2mn = 9mn$



【标注】【知识点】巧用网格作无理数边长

【重点强调】

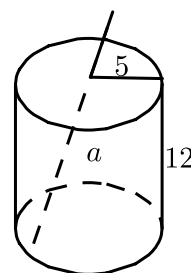
2017~2018学年天津南开区天津市育贤中学初二下学期期中第18题3分

五、勾股定理的实际应用

勾股定理的实际应用：将生活实际通过构造直角三角形,利用 方程 思想转化为数学问题.

|| 例题

26. 如图是一个圆柱形饮料罐，底面半径是5，高是12，上底面中心有一个小圆孔，则一条到达底部的直吸管在罐内部分 a 的长度（罐壁的厚度和小圆孔的大小忽略不计）范围是（ ）.



- A. $12 \leq a \leq 13$ B. $12 \leq a \leq 15$ C. $5 \leq a \leq 12$ D. $5 \leq a \leq 13$

【答案】A

【解析】当吸管底部在 O 点时吸管在罐内部分 a 最短，此时就是圆柱形的高，

即 $a = 12$ ，

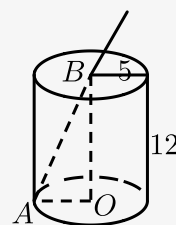
当吸管底部在 A 点时吸管在罐内部分 a 最长，即线段 AB 的长，

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，

$\therefore$ 此时 $a = 13$ ，

$\therefore 12 \leq a \leq 13$ ，

故选A.



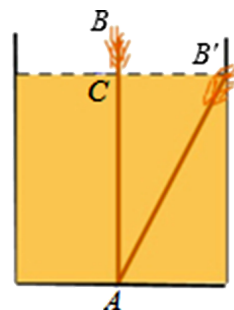
【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

【思想】分类讨论思想

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市第二南开中学初二下学期月考第10题3分

27. 如图，有一个水池，其底面是边长为16尺的正方形，一根芦苇 AB 生长在水池的正中央，高出水面部分 BC 的长为2尺，如果把该芦苇沿与水池边垂直的方向拉向岸边，那么芦苇的顶部 B 恰好碰到岸边 B' ，则这根芦苇 AB 的长是（ ）。



A. 15尺

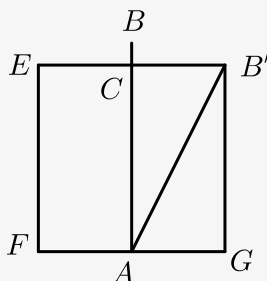
B. 16尺

C. 17尺

D. 18尺

【答案】C

【解析】 苇长 $AB = AB' = x$ 尺，则水深 $(x - 2)$ 尺，



$$\therefore B'E = 16 \text{ 尺},$$

$$\therefore B'C = 8 \text{ 尺},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AB'C \text{ 中}, 8^2 + (x - 2)^2 = x^2.$$

$$\therefore x = 17.$$

【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

练习

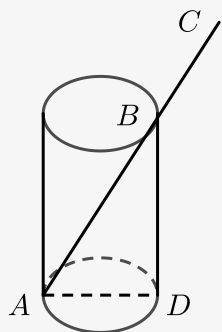
28. 将一根24cm的筷子置于底面直径为15cm，高为8cm的圆柱水杯中，设筷子露在杯子外面的长度为 h cm，则 h 的取值范围是（ ）。

A. $h \leq 17$

B. $h \geq 8$

C. $15 \leq h \leq 16$

D. $7 \leq h \leq 16$

【答案】 D**【解析】** 如图，当筷子的底端在 D 点时，筷子露在杯子外面的长度最长，

$$\therefore h = 24 - 8 = 16(\text{cm}) ;$$

当筷子的底端在 A 点时，筷子露在杯子外面的长度最短，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = 15\text{cm}$ ， $BD = 8\text{cm}$ ，

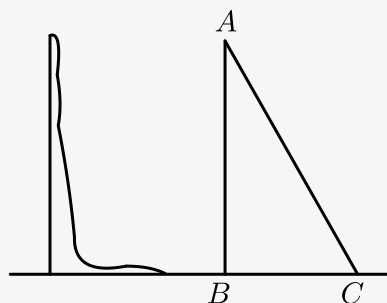
$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 17(\text{cm}) ,$$

$$\therefore \text{此时 } h = 24 - 17 = 7(\text{cm}) ,$$

所以 h 的取值范围是： $7 \leq h \leq 16$.**【标注】** 【能力】推理论证能力**【知识点】** 勾股定理与实际问题**【重点强调】**

2017~2018学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第6题3分

29. 小明想知道学校旗杆的高，他发现旗杆上的绳子垂到地面还多1m，当它把绳子的下端拉开5m后，发现下端刚好接触地面，则旗杆的高为 _____ m .

【答案】 12**【解析】** 根据题意画出图形如图所示：

则 $BC = 5\text{m}$,

设旗杆的高 AB 为 $x\text{m}$, 则绳子 AC 的长为 $(x + 1)(\text{m})$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 即 $x^2 + 5^2 = (x + 1)^2$,

解得 : $x = 12$, 故 $AB = 12\text{m}$, 即旗杆的高为 12m .

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年4月天津南开区南开大学附属中学初二下学期月考第11题